На правах рукописи

Федотов Александр Евгеньевич

СМЕШАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2007

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
"Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина"

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Карчевский Михаил Миронович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Копысов Сергей Петрович
	кандидат физико-математических наук, Бандеров Виктор Викторович
Ведущая организация:	Московский государственный университет

Защита диссертации состоится «29» ноября 2007 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 по защите диссертаций на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук при Казанском государственном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18, корпус 2, ауд. 217).

С диссертационной работой можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «27» октября 2007 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1. Актуальность темы. Метод конечных элементов является одним из наиболее распространённых методов решения задач математической физики. Это связано с большой универсальностью метода, сочетающего в себе лучшие качества вариационных и разностных методов. К его несомненным достоинствам относятся возможность использования разнообразных сеток, сравнительная простота и единообразие способов построения схем высоких порядков точности в областях сложной формы. Метод естественным образом сохраняет основные свойства операторов исходных задач, такие как симметрия, положительная определенность и т. п.

Классические варианты МКЭ повышенного порядка точности предполагают использование пространств элементов высокой гладкости. Возникающие на этом пути численные алгоритмы зачастую оказываются весьма трудоемкими. Стремление использовать более простые элементы объясняет появление специального класса схем МКЭ — смешанных методов конечных элементов. Главное преимущество таких схем состоит в возможности использования простейших конечных элементов.Это достигается путем снижения порядка уравнений при помощи введения вспомогательных неизвестных. Как правило, эти неизвестные связаны с производными искомых функций и имеют определенный физический смысл (например, — это поток, изгибающие моменты, и т.д.), их вычисление зачастую представляет даже больший практический интерес.

Смешанные методы для линейных задач изучены достаточно хорошо. Достаточно полный обзор таких методов проведён в книге Ф. Брецци и М. Фортина «Смешанные и гибридные методы конечных элементов». Изучением смешанных методов для решения нелинейных задач, таких, как уравнения Кармана, нелинейные задачи монотонного типа, упругопластические пластины, занимались Л.Ш. Заботина, М.М. Карчевский, А.Д. Ляшко, М.Р Тимербаев, Х. Манузи, М. Фархлул.

Теория смешанных методов для линейных, а также весьма широких классов нелинейных эллиптических уравнений в пространствах $W_2^{(1)}$ развита к настоящему времени достаточно полно. Значительно слабее изучены теоретические вопросы смешанного метода конечных элементов для эллиптических уравнений в пространствах $W_p^{(1)}$ и уравнений в $W_2^{(1)}$ допускающих вырождение по нелинейности. В то же время, многие важные прикладные задачи приводят именно к таким уравнениям. К ним относятся, например, стационарные задачи теории фильтрации жидкости, подчиняющейся закону фильтрации с предельным градиентом сдвига.

2. Цель и задачи работы состоят в построении смешанных схем метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка, получении условий разрешимости и сходимости схем, оценок точности; построении и исследовании итерационных методов их численной реализации.

3. Научная новизна. Построены и исследованы смешанные схемы метода конечных элементов для уравнений с квазилинейными сильно монотонными операторами в пространствах $W_p^{(1)}$ и вырождающимися по нелинейности операторами в $W_2^{(1)}$. В частности, получены оценки скорости сходимости схем для задач с сильно монотонными операторами, для задач с монотонными операторами, допускающими вырождение по нелинейности, доказана слабая сходимость приближенного решения к точному при стремлении шага сетки к нулю, получены условия, при которых «поток» однозначно определяется по исходным данным задачи.

Предложены итерационные методы решения рассмотренных смешанных схем, получены оценки скорости сходимости для задач с сильно монотонными операторам и доказана сходимость приближенных решений и «потоков» к точным.

Предложенные смешанные схемы применены для решения нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом и точечным источником.

4. Основные результаты работы.

1. Оценки точности схем МКЭ для уравнений с квазилинейными сильно монотонными операторами в пространствах $W_p^{(1)}$ и теоремы о сходимости схем МКЭ для уравнений с вырождающимися по нелинейности операторами в $W_2^{(1)}$.

2. Итерационные методы решения смешанных схем МКЭ для уравнений с квазилинейными сильно монотонными операторами и вырождающимися по нелинейности операторами в $W_2^{(1)}$.

3. Оценки скорости сходимости итерационных методов решения смешанных схем МКЭ для уравнений с квазилинейными сильно монотонными операторами и теоремы о сходимости для уравнений с вырождающимися по нелинейности операторами в $W_2^{(1)}$.

4. Смешанные методы решения нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом сдвига и точечными источниками.

5. Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты и предложенные приближенные методы могут быть использованы при численном решении конкретных прикладных задач, при теоретическом исследовании смешанного метода конечных элементов для нелинейных задач, в учебном процессе — при разработке новых учебных курсов.

6. Достоверность результатов работы. Все результаты, полученные в диссертации, верны и подтверждены строгими математическими доказательствами и результатами численных экспериментов для модельных задач.

7. Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Пятом Всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения», посвященном 200-летию Казанского государственного университета, Казань, 17–21 сентября 2004 г., на Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и механики», Казань, 26 сентября–1 октября 2004 г., на V Республиканской научно-практической конференции молодых учёных и специалистов, Казань, 9 июня 2005 г., на Шестом Всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения», Казань, 1–4 октября 2005 г., на III международной конференции «Математические идеи П.Л. Чебышёва и их приложение к современным проблемам естествознания», Обнинск, 14–18 мая 2006 г., на VII международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Саранск, 17–19 мая 2006 г., на I международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем», Пенза, 14–15 сентября 2006 г., на Седьмом Всероссийском семинаре «Сеточные методы для краевых задач и приложения», Казань, 21–24 сентября 2007 г., на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета за 2004–2006 г.г., на научных семинарах кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета под руководством А.Д. Ляшко и М.М. Карчевского.

8. Публикации результатов. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе одна статья в издании из списка ВАК.

9. Благодарности. Диссертационная работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №06-01-00633).

10. Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка литературы, содержащего 108 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность тематики исследований, сформулирована цель работы, дан обзор работ, близких к тематике диссертации, изложено содержание диссертации.

В первой главе диссертации рассмотрена задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$:

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}\, a(x, \nabla u) + a_0(x, u) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{1}$$

где $a(x,\xi) = (a_1(x,\xi),\ a_2(x,\xi)),\ \xi \in R^3$.

Относительно коэффициентов задачи предполагаются выполненными условия сильной монотонности и ограниченности, т. е. при $1 < p < 2$ функции $a_i(x,\xi)$, $i = \overline{0,2}$ удовлетворяют неравенствам

$$|a_i(x,\xi) - a_i(x,\eta)| \leqslant c_1|\xi - \eta|^{p-1}, \quad i = \overline{0,2}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} (\overline{a}(x,\xi) - \overline{a}(x,\eta)) \cdot (\xi - \eta)\,(|\xi| + |\eta|)^{2-p} \geqslant c_4|\xi - \eta|^2 \\ \forall \xi, \eta \in R^3, x \in \Omega,\ c_4 = \mathrm{const} > 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\overline{a}(\cdot) = (a_0(\cdot), a_1(\cdot), a_2(\cdot))$, при $p \geqslant 2$

$$|a_i(x,\xi) - a_i(x,\eta)| \leqslant c_2|\xi - \eta|(|\xi| + |\eta|)^{p-2}, \quad i = \overline{0,2} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} (\overline{a}(x,\xi) - \overline{a}(x,\eta)) \cdot (\xi - \eta) \geqslant c_3|\xi - \eta|^p \quad \forall \xi, \eta \in R^3, \\ x \in \Omega,\ c_3 = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Для исходной задачи введено понятие обобщённого решения. Под обобщённым решением задачи (1) понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p > 1$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$L(u,v) \equiv \int_\Omega (a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x,u,\nabla u)v)dx = \\ = \int_\Omega fv dx \equiv (f,\ v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega).$$

Существенным при построении смешанной схемы первой главы, является наличие обратного оператора у $a(x,\cdot)$, что обусловлено выбором «потока» в качестве вспомогательной переменной. В связи с этим далее предполагается, что $a(x,\cdot)$ не зависит от u, т. е. $a(x,u,\nabla u) = a(x,\nabla u)$. Относительно $a_0(x,\cdot)$ будем считать, что $a_0(x,u,\nabla u) = a_0(x,u)$ и удовлетворяет условию

$$(a_0(x,\xi) - a_0(x,\eta)) \cdot (\xi - \eta) \geqslant 0 \quad \forall \xi, \eta \in R^1. \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2)–(6)*. Тогда оператор* $a(x,\cdot)$ *имеет обратный оператор* $a^{-1}(x,\cdot)$*, обладающий свойствами*

$$(\phi-\psi)\cdot\big(a^{-1}(x,\ \phi)-a^{-1}(x,\ \psi)\big)\geqslant c_5|\phi-\psi|^q,$$

$$\begin{gathered}\Big|a^{-1}(x,\ \phi)-a^{-1}(x,\ \psi)\Big|_p\leqslant c_6|\phi-\psi|_q^{q-1}\leqslant\\ \leqslant c_6\left(|\phi|+|\psi|\right)^{q-2}|\phi-\psi|,\quad 1<p<2\ \ \forall\phi,\psi\in R^2;\end{gathered}$$

$$(\phi-\psi)\cdot\big(a^{-1}(x,\ \phi)-a^{-1}(x,\ \psi)\big)\left(|\phi|+|\psi|\right)^{2-q}\geqslant c_7|\phi-\psi|^2,$$

$$|a^{-1}(x,\ \phi)-a^{-1}(x,\ \psi)|_p\leqslant c_8|\phi-\psi|_q^{q-1},\quad p\geqslant 2\ \ \forall\phi,\psi\in R^2.$$

В третьем параграфе сформулирована смешанная постановка задачи. При этом используется пространство

$$H(\mathrm{div},\Omega)=H_q(\mathrm{div},\Omega)=\Big\{j\in\left(L_q(\Omega)\right)^2:\ \mathrm{div}\,j\in L_q(\Omega)\Big\}$$

с нормой $\|j\|^q_{H_q(\mathrm{div},\,\Omega)}=\int\limits_\Omega(|j|^q+|\,\mathrm{div}\,j|^q)dx.$

Если u — обобщённое решение задачи (1), то при $j=a(x,\nabla u)$ $j\in H_q(\mathrm{div},\ \Omega)$ и выполнены соотношения

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega\left[-\,\mathrm{div}\,j+a_0(x,u)\right]v\,dx=\int\limits_\Omega f(x)v(x)\,dx\quad\forall v\in L_p(\Omega),\\&\int\limits_\Omega a^{-1}(x,j)\cdot q\,dx+\int\limits_\Omega u\,\mathrm{div}\,q\,dx=0\quad\forall q\in H_q,\end{aligned}\tag{7}$$

которые кладутся в основу расширенной постановки задачи (1), а именно, разыскивается пара функций $(u,j)\in L_p(\Omega)\times H_q(\mathrm{div},\Omega)$, удовлетворяющих интегральным тождествам (7).

Теорема 1. *При любой функции* $f\in L_q(\Omega)$ *решение задачи* (7) *существует.*

Для смешанной постановки задачи доказана теорема устойчивости, из которой следует единственность решения задачи.

Теорема 2. *Задача (7) является устойчивой по правой части, то есть если (u_1, j_1) – решение, соответствующее правой части f_1, а (u_2, j_2) – решение, соответствующее правой части f_2, то в случае $p \geqslant 2$ справедлива оценка*

$$\|u_2 - u_1\|^p_{L_p(\Omega)} + \|j_2 - j_1\|^q_{H_q(\mathrm{div},\,\Omega)} \leqslant C \Big(\|f_2 - f_1\|^{\frac{p}{2p-3}}_{L_q(\Omega)} + \\ + \|f_2 - f_1\|^{\frac{q}{3-q}}_{L_q(\Omega)} + \Big(\|f_2 - f_1\|_{L_q(\Omega)} + \|f_2 - f_1\|^{\frac{1}{2p-3}}_{L_q(\Omega)}, \Big)^q \Big) \tag{8}$$

а в случае $1 < p < 2$ — оценка

$$\|u_2 - u_1\|^p_{L_p(\Omega)} + \|j_2 - j_1\|^q_{H_q(\mathrm{div},\,\Omega)} \leqslant C \Big(\|f_2 - f_1\|^{p(p-1)}_{L_q(\Omega)} + \\ + \|f_2 - f_1\|^p_{L_q(\Omega)} + \Big(\|f_2 - f_1\|^{p-1}_{L_q(\Omega)} + \|f_2 - f_1\|_{L_q(\Omega)} \Big)^q \Big). \tag{9}$$

Постоянная C имеет вид

$$C = \max\Big(1, c(\|f_2\|_{L_q(\Omega)} + \|f_1\|_{L_q(\Omega)})^{q(2-q)/(3-q)}, \\ c\Big(\|f_2\|^{q-1}_{L_q(\Omega)} + \|f_1\|^{q-1}_{L_q(\Omega)}\Big)^{q(p-2)}\Big)$$

при $p \geqslant 2$ и

$$C = \max\Big(1, c\left(\|f_2\|_{L_q(\Omega)} + \|f_1\|_{L_q(\Omega)}\right)^{q(q-2)/(q-1)}, \\ c(\|f_2\|^{p-1}_{L_q(\Omega)} + \|f_1\|^{p-1}_{L_q(\Omega)})^{(q-2)(q+p)/(q-1)}\Big)$$

при $1 < p < 2$.

В четвёртом параграфе проводится дискретизация задачи в смешанной постановке. При этом полагается, что область Ω является многоугольником, на котором выполнена правильная регулярная триангуляция $\mathcal{T}_h$. Для приближения функции u на каждом конечном элементе используется пространство P_k полиномов степени k по совокупности переменных, а для приближения функции j — пространство полиномов Равьяра — Тома вида

$$RT_k(K) = (P_k(K))^2 \oplus x P_k(K), \quad x = (x_1, x_2),$$

где K — треугольник триангуляции. На всей области Ω функции u и j приближаются соответственно функциями из пространств

$$M_h = \{v_h \in L_p(\Omega);\, v_h|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ N_h = \{q_h \in H_q;\, q|_K \in RT_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Под приближенным решением задачи (7) понимается пара функций $(u_h, j_h) \in M_h \times N_h = X_h$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} [-\operatorname{div} j_h + a_0(x,\ u_h)]\, v_h\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x) v_h(x)\, dx, \\ &\int\limits_{\Omega} a^{-1}(x,\ j_h) \cdot q_h\, dx + \int\limits_{\Omega} u_h \operatorname{div} q_h\, dx = 0 \quad \forall (v_h, q_h) \in X_h. \end{aligned} \tag{10}$$

Приближенная задача является устойчивой по правой части, при этом имеют место оценки аналогичные (8) и (9). Относительно приближенного решения задачи доказана

Теорема 3. *Задача* (10) *имеет единственное решение при любой правой части* $f \in L_q(\Omega)$.

В пятом параграфе получены оценки точности смешанной схемы.

Теорема 4. *Пусть* (u, j) *— решение смешанной задачи* (7), *а* (u_h, j_h) *— решение приближенной смешанной задачи* (10), *выполнены условия гладкости*

$$u \in W_p^{(k+1)}(\Omega),\ j \in \left(W_p^{(k+1)}(\Omega)\right)^2,\ \operatorname{div} j \in W_q^{(k+1)}(\Omega).$$

Тогда в случае $p \geqslant 2$

$$\begin{aligned} &\|u - u_h\|^p_{L_p(\Omega)} + \|j - j_h\|^q_{L_q(\Omega)} + \|\operatorname{div}(j - j_h)\|^p_{L_q(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant c h^{(k+1)\frac{q}{3-q}} \left(\|u\|^q_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} + \|j\|^q_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} + \|\operatorname{div}\, j\|^q_{W_q^{(k+1)}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{3-q}} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant C h^{(k+1)\frac{q}{3-q}} \end{aligned}$$

и в случае $1 < p < 2$

$$\begin{aligned} &\|u - u_h\|^p_{L_p(\Omega)} + \|j - j_h\|^q_{L_q(\Omega)} + \|\operatorname{div}(j - j_h)\|^q_{L_q(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant c \Big(h^{(k+1)p} \|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} + \\ &+ h^{(k+1)q} \left(\|j\|^q_{W_q^{(k+1)}(\Omega)} + \|\operatorname{div}\, j\|^q_{W_q^{(k+1)}(\Omega)}\right)\Big) \leqslant C h^{(k+1)p}. \end{aligned}$$

В шестом параграфе предложены итерационные методы решения приближенной задачи (10) и рассмотрены способы их численной реализации.

Оператор A_h введён соотношением

$$A_h u_h \cdot v_h = \int\limits_\Omega (-\operatorname{div} j(u_h) + a_0(x, u_h)) v_h dx \quad \forall u_h, v_h \in M_h,$$

где $j(u_h) \in N_h$ определяется уравнением

$$\int\limits_\Omega a^{-1}(j_h(u_h)) \cdot q_h dx + \int\limits_\Omega u_h \operatorname{div} q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h.$$

При таком определении оператора A_h приближенная задача (10) может быть переписана в виде

$$A_h u_h = f_h, \quad f_h \cdot v_h = \int\limits_\Omega f v_h dx \quad \forall v_h \in M_h. \tag{11}$$

Оператор B_h определён как частный случай A_h, соотношением

$$B_h u_h \cdot v_h = \int\limits_\Omega j_h^*(u_h) \cdot j^*(v_h) dx \quad \forall u_h, v_h \in M_h,$$

где $j_h^*(u_h) \in N_h$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_\Omega j_h^*(u_h) \cdot q_h dx + \int\limits_\Omega u_h \operatorname{div} q_h dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h.$$

Для решения задачи (10) предлагается использовать итерационный процесс:

$$B_h \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau} + A_h u_h^k = f_h, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

где u_h^0 задана, а $\tau > 0$ — итерационный параметр.

Реализация итерационного метода (12) может быть сведена к решению системы уравнений с седловой матрицей:

$$\begin{array}{lll} D_h g_h^k & + C_h w_h^k & = 0, \\ -C_h^T g_h^k & & = F_h^k, \end{array} \tag{13}$$

и $u_h^{k+1} = u_h^k + \tau w_h^k$. Здесь

$$D_h j_h \cdot q_h = \int\limits_\Omega j_h \cdot q_h dx \quad \forall j_h, q_h \in N_n,$$

$$C_h v_h \cdot q_h = \int\limits_\Omega v_h \operatorname{div} q_h dx \quad \forall v_h \in M_h, q_h \in N_n,$$

$$F_h^k \cdot v_h = \int\limits_\Omega (f + \operatorname{div} j_h^k - a_0(x, u_h^k)) v_h dx \quad \forall v_h \in M_h.$$

Система (13) возникает при решении уравнения Пуассона с использованием смешанного метода конечных элементов. Прямые и итерационные методы решения таких системы достаточно хорошо изучены.

Из (13) видно, что $B_h = C_h^T D_h^{-1} C_h$. Матрицы B_h и $\widetilde{B}_h = h^{-2} C_h^T C_h$ энергетически эквивалентны:

$$c_1^{-1} \widetilde{B}_h \leqslant B_h \leqslant c_0^{-1} \widetilde{B}_h,$$

поэтому наряду с итерационным процессом (12) предлагается использовать итерационный процесс

$$\widetilde{B}_h \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau} + A_h u_h^k = f_h,\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Реализация нового итерационного процесса с $\widetilde{B}_h$ существенно проще, чем реализация итерационного процесса с B_h, так как вместо решения системы с седловой матрицей здесь приходится решать систему с симметричной положительно определенной ленточной матрицей $\widetilde{B}_h$ меньшей размерности.

Теорема 5. *Пусть* $p = 2$ *и выполнены условия* (2), (3), (6). *Тогда оператор* A_h *является сильно монотонным и липшиц-непрерывным в энергетической норме* B_h, *т. е. имеют место неравенства*

$$(A_h u_h - A_h v_h) \cdot (u_h - v_h) \geqslant c_3 \|u_h - v_h\|_{B_h}^2 \quad \forall u_h, v_h \in M_h,$$

$$|(A_h u_h - A_h v_h) \cdot w_h| \leqslant c_1 \|u_h - v_h\|_{B_h} \|w_h\|_{B_h} \quad \forall u_h, v_h, w_h \in M_h.$$

Здесь $\|u_h\|_{B_h} = (B_h u_h \cdot u_h)^{1/2}$ *– это норма, соответствующая оператору* B_h.

С использованием свойств сильной монотонности и липшиц-непрерывности в энергетической норме B_h доказана

Т е о р е м а 6. *Пусть выполнены условия (2), (3), (6). Тогда последовательность u_h^k, построенная с использованием итерационного метода (12), сходится для любого начального приближения u_h^0, и для любого $\tau \in (0, c_0^5/c_1^4]$ к решению задачи (11) и имеет место оценка*

$$\|u_h^{k+1} - u_h\|_{B_h} \leqslant q(\tau)\|u_h^k - u_h\|_{B_h},$$

где $0 < q(\tau) < 1$.

Оценки скорости сходимости итерационного метода (12) не зависят от шага сетки h. Следовательно, объём вычислительной работы, необходимый для решения исходной системы, определяется в основном используемым для решения системы (12) методом.

Вследствие эквивалентности матриц $\widetilde{B}_h$ и B_h все утверждения относительно сходимости первого итерационного метода сохраняются (с очевидной корректировкой условий на параметр τ) и для второго предложенного итерационного метода с матрицей $\widetilde{B}_h$.

Во второй главе рассмотрена задача Дирихле для двумерного квазилинейного дивергентного эллиптического уравнения второго порядка, допускающего вырождение по нелинейности на некоторой подобласти определения решения. Решается задача

$$\begin{gathered} -\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \quad x \in \Gamma \end{gathered} \tag{14}$$

в ограниченной области $\Omega \subset R^2$ с липшицевой границей Γ. Здесь $a(x,\phi) = (a_1(x,\phi),\ a_2(x,\phi)),\ a_0(x,\phi)$ — заданные функции, непрерывные при $x \in \Omega,\ \phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) \in R^3$.

Относительно коэффициентов задачи предполагаются выполненными алгебраические условия монотонности, коэрцитивности и ограниченной нелинейности:

$$(\overline{a}(x,\phi) - \overline{a}(x,\psi)) \cdot (\phi - \psi) \geqslant 0 \quad \forall x \in \Omega,\ \phi, \psi \in R^3, \tag{15}$$

$$\overline{a}(x,\phi) \cdot \phi \geqslant c_1(\phi_2^2 + \phi_3^2) - c_2 \quad \forall x \in \Omega,\ \phi \in R^3, \tag{16}$$

$$|\overline{a}(x,\phi)| \leqslant c_3(1+|\phi|) \quad \forall x\in\Omega, \phi\in R^3, \tag{17}$$

где $\overline{a}(x,\phi) = (a_0(x,\phi), a_1(x,\phi), a_2(x,\phi)),\ c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$.

Условия, налагаемые на функции, образующие уравнение, являются весьма общими и допускают вырождение уравнения по градиенту на некоторой подобласти определения решения. Оператор задачи при этом оказывается лишь монотонным.

Под обобщённым решением задачи (14) понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} L(u,v) \equiv \int\limits_\Omega (a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla v + a_0(x,u,\nabla u)v)\,dx = \\ = \int\limits_\Omega fv\,dx \equiv (f,\ v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \end{aligned} \tag{18}$$

Во втором параграфе формулируется смешанная задача. В качестве вспомогательной переменной при построении смешанной задачи предлагается выбирать функцию $j = \nabla u$. При этом, если u — обобщённое решение задачи (14), то тождественно выполняется система

$$\left\{ \begin{aligned} &\int\limits_\Omega a(x,u,j(u))\cdot j(v) + a_0(x,u,j)v\,dx = \int\limits_\Omega fv\,dx \quad \forall v\in L_2(\Omega), \\ &\int\limits_\Omega j(u)\cdot q\,dx + \int\limits_\Omega u\,\mathrm{div}\,q\,dx = 0 \quad \forall\, q\in H(\mathrm{div},\Omega). \end{aligned} \right. \tag{19}$$

Система (19) кладётся в основу смешанной постановки, а именно, разыскивается пара функций $(u,j)\in L_2(\Omega)\times(L_2(\Omega))^2$, удовлетворяющая интегральным тождествам (19).

В третьем параграфе формулируется дискретная смешанная задача. Относительно области Ω, как и в первой главе, предполагается, что она является многоугольником. Вводится правильная регулярная триангуляция $\mathcal{T}_h$. Функции u и h приближаются функциями из пространств M_h и N_h соответственно.

Под приближенным решением задачи (14), понимается пара функций $(u_h, j_h) \in X_h = M_h \times N_h$ таких, что

$$\int\limits_\Omega (a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h) + a_0(x, u_h, j_h(u_h))v_h)\, dx = \int\limits_\Omega f v_h\, dx \qquad (20)$$

для любых $v_h \in M_h$, где функция $j_h(u_h) \in N_h$ определяется по $u_h \in M_h$ как решение уравнения

$$\int\limits_\Omega j_h(u_h) \cdot q_h\, dx + \int\limits_\Omega u_h \operatorname{div} q_h\, dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h. \qquad (21)$$

В четвёртом параграфе доказаны существование решения приближенной задачи и слабая сходимость подпоследовательности приближенных решений к точному.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (15)–(17). *Тогда задача* (20), (21) *имеет по крайней мере одно решение при любой правой части* $f \in L_2(\Omega)$. *Для любого решения задачи* (20), (21) *справедлива априорная оценка*

$$\|j_h(u_h)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega)}, \qquad (22)$$

где c *— постоянная не зависящая от* h.

Доказано, что для любого решения (20), (21) имеет место оценка типа неравенства Фридрихса

$$\int\limits_\Omega u_h^2\, dx \leqslant c \int\limits_\Omega |j_h(u_h)|^2\, dx \quad \forall u_h \in M_h,$$

которая совместно с (22) позволяет оценить $\|u_h\|_{L_2(\Omega)}$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (15)–(17). *Тогда существуют последовательности решений* u_h *и* $j_h(u_h)$ *и функции* u^* *и* j^* *такие, что* $u_h \rightharpoonup u^*$, $j_h(u_h) \rightharpoonup j^*$ [1] *в* $L_2(\Omega)$, *причём, пара функций* u^*, j^* *является точным решением задачи* (19).

[1] Как обычно, символ $\rightharpoonup$ обозначает слабую сходимость в соответствующем пространстве.

Использование вместо условия монотонности (15) более сильного условия (условия подчинения)

$$|\bar{a}(x,\xi)-\bar{a}(x,\eta)| \leqslant c((\bar{a}(x,\xi)-\bar{a}(x,\eta))\cdot(\xi-\eta))^{1/2} \quad \forall \xi,\eta \in R^3 \qquad (23)$$

даёт возможность доказать единственность точного и приближенного потоков и сильную сходимость приближенного потока к точному по шагу сетки, а именно, установлены следующие результаты.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (16), (17), (23). *Тогда «поток»* $\bar{a}(x,u,j(u))$, *построенный по решению задачи* (19) *и его конечноэлементная аппроксимация* $\bar{a}(x,u_h,j_h(u_h))$, *построенная по решению задачи* (20), (21), *определяются исходными данными задачи* (14) *однозначно.*

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* (16), (17), (23). *Тогда существует последовательность* $h\to 0$ *такая, что имеет место сильная сходимость* $a(x,u_h,j_h(u_h))\to a(x,u,j(u))$ *в пространстве* $L_2(\Omega)$.

В пятом и шестом параграфах рассматриваются итерационные методы для решения задач допускающих вырождение по нелинейности. Введены конечномерные операторы A_h, C_h и вектор f_h соотношениями

$$A_h u_h \cdot v_h = \int\limits_\Omega (a(x,u_h,j_h(u_h))\cdot j_h(v_h) + a_0(x,u_h,j_h(u_h))v_h)\,dx,$$

$$B_h u_h \cdot v_h = \int\limits_\Omega j_h(u_h)\cdot j_h(v_h)\,dx, \quad f_h\cdot v_h = \int\limits_\Omega f v_h\,dx$$

$$\forall\, u_h, v_h \in M_h.$$

Для решения задачи (20), (21) предложено использовать итерационный метод

$$B_h \frac{u_h^{k+1}-u_h^k}{\tau} = f_h - A_h u_h^k = r_h^k,\ k=0,1,2,\ldots, \qquad (24)$$

либо итерационный метод с $\widetilde{B}$, рассмотренный в первой главе.

Доказана

Теорема 10. *Пусть выполнены условия* (16), (23). *Тогда существует решение задачи* (20), (21), *и при любом начальном приближении* u_h^0, $0 < \tau < 2/c_1$ *последовательность невязок* $A_h u_h^k - f_h$ *стремится к нулю.*

Сходимость последовательности приближений построенных с использованием предлагаемых итерационных методов имеет место только при более сильных ограничениях на $\bar{a}(x,p)$.

Теорема 11. *Пусть выполнены условия* (23) *и*

$$(\bar{a}(x,p) - \bar{a}(x,q)) \cdot (p-q) \geqslant c_0|p-q|^2 \quad \forall p,q \in R^3,$$

где c_0 *— положительная постоянная. Тогда задача* (20), (21) *имеет единственное решение. Последовательность приближений, построенная по итерационному методу* (24), *сходится к приближенному решению, т. е.* $u_h^k \to u_h$ *при* $k \to \infty$. *Справедлива следующая оценка скорости сходимости итерационного метода* (24):

$$\|u_h^{k+1} - u_h\|_{B_h} \leqslant \rho(\tau)\|u_h^k - u_h\|_{B_h},$$

где $\rho(\tau) = (1 - 2\tau c_0 + \tau^2 c_1^2)^{1/2} < 1$ *при* $0 < \tau < 2c_0/c_1^2$.

Таким образом, можно использовать предлагаемые итерационные методы для решения задач с сильно монотонным оператором когда в качестве вспомогательной переменной выбирается градиент искомого решения, при этом последней теоремой даётся оценка скорости сходимости. Важно отметить, что при этом не требуется независимость функции $a(x,\cdot)$ от u, в отличие от условий налагаемых на функцию a в первой главе.

В третьей главе работы проведено подробное исследование смешанного метода конечных элементов применительно к квазилинейным эллиптическим вырождающимся уравнениям, возникающим при описании фильтрации жидкости, следующей закону фильтрации с предельным градиентом. Особое внимание при этом уделяется построению решения, соответствующего точечному источнику заданной интенсивности. Приведены также результаты численных экспериментов.

Рассмотрена краевая задача

$$
\begin{gathered}
-\operatorname{div}\left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset R^2, \\
u(x) = 0, \quad x \in \Gamma.
\end{gathered} \tag{25}
$$

Поле скоростей фильтрации определяется как

$$
v = -g(|\nabla u|)|\nabla u|^{-1}\nabla u,
$$

где u — поле давлений жидкости. Изучается фильтрация в области Ω из R^2, с липшиц-непрерывной границей Γ, на которой давление считается равным нулю, при наличии источников плотности $f(x)$.

Считаем, что функция g, определяющая закон фильтрации, представима в виде

$$
g(s) = \begin{cases} 0, & s < s_0, \\ g^*(s - s_0), & s \geqslant s_0, \end{cases} \tag{26}
$$

где $s_0 \geqslant 0$ — заданное число, называемое предельным градиентом сдвига.

Уравнение (25) вырождается при $|\nabla u| \leqslant s_0$. Подобласти области Ω, в которых выполнено это условие называются застойными зонами. Скорость фильтрации в застойных зонах обращается в нуль.

Относительно функции $g^* : [0, +\infty) \to R^1$ предполагаются выполненными условия:

$$
g^*(0) = 0, \; g^*(s) > g^*(t) \;\; \forall s > t \geqslant 0, \tag{27}
$$

$$
g^*(s^*) \geqslant ks^*, \; g^*(s) - g^*(t) \geqslant k(s - t) \;\; \forall s \geqslant t \geqslant s^*, \tag{28}
$$

$$
g^*(s) - g^*(t) \leqslant L(s - t) \;\; \forall s \geqslant t \geqslant 0, \tag{29}
$$

где $k > 0, \; L > 0, s^* \geqslant 0$ — заданные постоянные.

По функции g определён оператор $G : R^2 \to R^2$:

$$
Gy = \begin{cases} g(|y|)|y|^{-1}y, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0. \end{cases}
$$

С точки зрения приложений особенно интересен случай, когда в качестве функции плотности источников $f(x)$ рассматривается функция

$q\delta(x)$, где $\delta(x)$ есть δ-функция, сосредоточенная в начале координат. Это соответствует задаче с точечным источником (скважиной) с заданной интенсивностью (дебитом) q. Предполагается, что начало координат принадлежит Ω.

Под обобщённым решением задачи (25), понимается функция v из пространства $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} G(\nabla v(x)) \cdot \nabla \eta(x) dx = q\eta(0) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{30}$$

Существование решения задачи (30) доказано в работе О.А. Задворнова[1] на основе представления его в виде $v = v_r + v_\Gamma + u$, где u — функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} (G(\nabla(v_r + v_\Gamma + u)) - G(\nabla v_r)) \cdot \nabla \eta \, dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega),$$

$v_r \in W_1^1(\Omega)$ — сужение на область Ω решения задачи (30) для круга

$$B_r = \{x \in R^n : |x| < r\} \supset \Omega,$$

где $r > 0$ фиксировано, v_Γ — произвольная фиксированная функция из пространства $W_2^1(\Omega)$ такая, что

$$v_\Gamma = -v_r(x) \quad \forall x \in \Gamma.$$

Функция v_r существует и допускает явное представление, а именно, $v_r(x) = p_r(|x|)$, где

$$p_r(s) = \int\limits_s^r h\left(\frac{q}{2\pi}\xi\right) d\xi,$$

а $h(s) = s^* + h^*(s)$, h^* — функция, обратная к функции g^*, существование которой обеспечивается, условиями (27)–(29) .

При построении численного метода решения задачи (30) используется ее расширенная смешанная формулировка.

[1]Задворнов О. А. Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника / Задворнов О. А. // Известия вузов. Математика. — 2005. — № 1. — С. 58–63.

Разыскивается пара функций $(u, j) \in L_2(\Omega) \times (L_2(\Omega))^2$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} (G(\nabla(v_r + v_\Gamma) + j(u)) - G(\nabla v_r)) \cdot j(v)\, dx = 0 \quad \forall v \in L_2(\Omega), \\ \\ \int\limits_{\Omega} j(v) \cdot q\, dx + \int\limits_{\Omega} v \operatorname{div} q\, dx = 0 \quad \forall\, q \in H(\operatorname{div}, \Omega). \end{cases} \tag{31}$$

В силу того что любое обобщённое решение задачи (25) порождает решение задачи (31), имеет место

Теорема 12. *Пусть выполнены условия* (26)–(29). *Тогда решение задачи* (31) *существует.*

Во втором и третьем параграфах третьей главы проводится дискретизация смешанной постановки задачи и её исследование. При этом существенно используются результаты второй главы.

Под приближенным решением задачи (25) понимается пара функций $(u_h, j_h(u_h)) \in X_h$ таких, что

$$\int\limits_{\Omega} G_0(j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h) dx = 0, \quad \forall v_h \in M_h, \tag{32}$$

где $G_0(j_h(u_h)) = G(\nabla(v_r + v_\Gamma) + j_h(u_h)) - G(\nabla v_r)$, функция $j_h(u_h) \in N_h$ определяется по $u_h \in M_h$ как решение уравнения:

$$\int\limits_{\Omega} j_h(u_h) \cdot q_h\, dx + \int\limits_{\Omega} u_h \operatorname{div} q_h\, dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h. \tag{33}$$

Теорема 13. *Пусть выполнены условия* (26)–(29). *Тогда задача* (32), (33) *имеет по крайней мере одно решение. Для любого решения задачи* (32), (33) *справедлива априорная оценка:*

$$\|j_h(u_h)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c(\|v_\Gamma\|_{L_2(\Omega)} + 1),$$

где c — постоянная не зависящая от h.

В качестве приближения к скорости фильтрации естественно рассматривать функцию $V_h(u_h) = G(\nabla v_r + \nabla v_\Gamma + j_h(u_h))$, где u_h — какое-либо решение задачи (32), (33), для которого доказана

Теорема 14. *Пусть выполнены условия* (26)–(29). *Тогда функция* V_h *определяется единственным образом, и существует последовательность* $h \to 0$ *такая, что имеет место сильная сходимость* $V_h(u_h) \to V(u)$ *в пространстве* $L_2(\Omega)$.

В четвёртом параграфе предлагается использовать для решения задачи (32), (33) итерационный метод

$$B_h \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau} + A_h u_h^k = 0, \ k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$A_h u_h \cdot v_h = \int_\Omega G_0(j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h)\, dx \quad \forall\, u_h, v_h \in M_h,$$

$$B_h v_h \cdot v_h = \int_\Omega j_h(u_h) \cdot j_h(v_h)\, dx \quad \forall\, u_h, v_h \in M_h.$$

Такой итерационный процесс сходится при любом начальном приближении u_h^0 и итерационном параметре $\tau \in (0, 2/L_1)$.

В заключительном, пятом параграфе рассмотрены варианты реализации предлагаемых методов, приведены результаты численных экспериментов.

11. Опубликованные работы по теме диссертации. По теме диссертации опубликованы работы:

1. Карчевский, М.М. Об одном варианте смешанного метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений / М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // Исследования по прикладной математике. Вып. 24. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2003. – С. 74–80.

2. Karchevsky, M.M. Error estimates and iterative procedure for mixed finite element solution of second-order quasi-linear elliptic problems / M.M. Karchevsky, A.E. Fedotov // Computational Methods in Applied Mathematics, Vol. 4 (2004), No.4, pp. 445–463.

3. Карчевский, М.М. Смешанный метод конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений / М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Пятого Всероссийского семинара, посвящённого 200-летию Казанского государственного университета. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2004. – С. 112–115.

4. Карчевский, М.М. Оценки точности смешанного метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений / М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // Труды Мат. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 25 / Казанское мат. об-во. Актуальные проблемы математики и механики // Материалы международной научной конференции. — Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2004. – С. 136–137.

5. Карчевский, М.М. Смешанный метод конечных элементов для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений / М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // Учёные записки Казанского государственного университета, т. 147, кн. 3, 2005. – С. 127–140.

6. Карчевский, М.М. Об итерационном методе численной реализации смешанного метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка / М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // V Республиканская научно-практическая конференция молодых учёных и специалистов «Наука. Инновации. Бизнес.», Казань, 9 июня 2005 года: Материалы конференции. — Казань: Изд-во «Экоцентр», 2005 г. – С. 62–63.

7. Карчевский, М.М. Смешанная схема МКЭ для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений / М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Шестого Всероссийского семинара. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2005. – С. 129–133.

8. Федотов, А.Е. Смешанный метод конечных элементов для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений / А.Е. Федотов // Труды Средневолжского математического общества, Т. 8, № 1.— Саранск: Республиканская типография «Красный октябрь», 2006. – С. 319–329.

9. Карчевский, М.М. Применение смешанных схем МКЭ для решения задач нелинейной теории фильтрации / М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // Сборник статей I Международной научно-технической конференции. — Пенза: «Приволжский Дом знаний», 2006. – С. 41–44.

10. Задворнов, О.А. Применение смешанных схем МКЭ для решения задач нелинейной теории фильтрации / О.А. Задворнов, М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // Известия вузов. Математика. — 2007. — № 8. – С. 16–26.

11. Карчевский, М.М. Смешанный метод конечных элементов для нелинейных задач теории фильтрации с точечным источником / М.М. Карчевский, А.Е. Федотов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Седьмого Всероссийского семинара. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2007. – С. 142–150.